ĐỀ THI HSG LỚP 9 – QUẬN BÌNH THẠNH (2015-2016)

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (4 điểm)

a) Rút gọn: $A=\sqrt{13+\sqrt{2}+5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}+\sqrt{13+\sqrt{2}-5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}$

b) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Tính x + y.

Bài 2: (5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt{13-3x}+\sqrt{3x-11}=3x^2-24x+50$

b) $x^2-2x+3=(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}$

c) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $a(1+b)+b(1+4c)+c(1+9a)\ge 12\sqrt{abc}$.

b)

● Cho a, b, x, y là các số thực và x, y > 0. Chứng minh: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

●Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài 4: (1 điểm) Giá bán của một hộp bút là 21.250 đồng. Mừng ngày 30/4 người bán giảm giá lần thứ nhất. Đến ngày Quốc tế thiếu nhi người bán lại giảm giá một lần nữa, nên giá bán chỉ còn lại là 19.176 đồng. Hỏi mỗi lần người bán giảm giá bao nhiêu phần trăm, biết rằng số phần trăm mỗi lần giảm giá là số chỉ có một chữ số.

Bài 5: (4 điểm) Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O,R). Qua A vẽ đường thẳng (d) $\perp$ OA. Gọi M là điểm bất kỳ trên (d). Từ M vẽ 2 tiếp tuyến ME và MF với đường tròn (O) (E, F là 2 tiếp điểm). Gọi N và B là giao điểm của EF với OM và OA.

a) Chứng minh: ON.OM = OA.OB

b) Vẽ tiếp tuyến AD, AC đến (O) (C, D là 2 tiếp điểm). Chứng minh: C, D, B thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của M để $S_{\Delta MEF}$ nhỏ nhất.

Bài 6: (2 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH và trung tuyến BM cắt nhau tại O, CO cắt AB tại D. Qua A vẽ đường thẳng (d) song song với BC. (d) cắt CD, BM tại E và F.

a) Chứng minh: $\frac{HB}{HC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{DA}{DB}=1$.

b) Giả sử AC = BH, chứng minh CD là phân giác $\widehat{ACB}$.

HẾT

THĂNG LONG

Hướng Dẫn Giải:
ĐỀ THI HSG LỚP 9 – QUẬN BÌNH THẠNH – (2015-2016)

Bài 1: (4 điểm)

a) Rút gọn: $A=\sqrt{13+\sqrt{2}+5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}+\sqrt{13+\sqrt{2}-5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}$

$A=\sqrt{13+\sqrt{2}+5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}+\sqrt{13+\sqrt{2}-5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}$. $A>0$

$\Rightarrow A^2=13+\sqrt{2}+5\sqrt{1+2\sqrt{2}}+2\sqrt{13+\sqrt{2}+5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}.\sqrt{13+\sqrt{2}-5\sqrt{1+2\sqrt{2}}}+13+\sqrt{2}-5\sqrt{1+2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow A^2=26+2\sqrt{2}+2\sqrt{\left(13+\sqrt{2}\right)^2-\left(5\sqrt{1+2\sqrt{2}}\right)^2}$

$\Leftrightarrow A^2=26+2\sqrt{2}+2\sqrt{169+26\sqrt{2}+2-25\left(1+2\sqrt{2}\right)}$

$\Leftrightarrow A^2=26+2\sqrt{2}+2\sqrt{146-24\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow A^2=26+2\sqrt{2}+2\sqrt{\left(12-\sqrt{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow A^2=26+2\sqrt{2}+2\left(12-\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow A^2=50$

$\Rightarrow A=5\sqrt{2}\left(\text{do } A>0\right)$

b) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Tính x + y.

Ta có: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}-x$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1-x^2\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}-x$

$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x \quad (1)$

Ta có: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\sqrt{y^2+1}-y$

$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y^2+1-y^2\right)=\sqrt{y^2+1}-y$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \quad (2)$

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta có:

$y+\sqrt{y^2+1}+x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{y^2+1}-y$

$\Leftrightarrow x+y=-x-y$

$\Leftrightarrow x+y=0$

Bài 2: (5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt{13-3x}+\sqrt{3x-11}=3x^2-24x+50$

Điều kiện: $\frac{11}{3}\le x\le\frac{13}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{13-3x}\le\frac{1+13-3x}{2}=\frac{14-3x}{2}\\ \sqrt{3x-11}\le\frac{1+3x-11}{2}=\frac{-10+3x}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow\sqrt{13-3x}+\sqrt{3x-11}\le 2\Rightarrow VT\le 2$

Ta có: $3x^2-24x+50=3(x-4)^2+2\Rightarrow VP\ge 2$

Do đó, để dấu ‘’=’’ xảy ra khi $\begin{cases}1=13-3x\\ 1=3x-11\\ x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

Vậy $S=\{4\}$

b) $x^2-2x+3=(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}$

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+3}, t\ge 0$

$\Rightarrow t^2=x^2-3x+3\Leftrightarrow x^2=t^2+3x-3$.

Khi đó, phương trình trở thành:

$t^2+3x-3-2x+3=(x+1)t$

$\Leftrightarrow t^2+x=xt+t$

$\Leftrightarrow t^2-xt+x-t=0$

$\Leftrightarrow t(t-x)-1(x-t)=0$

$\Leftrightarrow (t-x)(t-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\ t=1\end{array}\right.$

TH1: $t=x\Rightarrow\sqrt{x^2-3x+3}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+3=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

TH2: $t=1\Rightarrow\sqrt{x^2-3x+3}=1\Leftrightarrow x^2-3x+3=1\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=1$ hay $x=2$ (nhan)

Vậy $S=\{1;2\}$

c) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{71}{8}}>0 \\ b=\sqrt{2x^2-x+1}=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2=2x^2+x+9 \\ b^2=2x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=2x+8 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=2(x+4) \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{2}=x+4$

Phương trình trở thành:

$a+b=\frac{(a-b)(a+b)}{2}$

$\Leftrightarrow 2(a+b)=(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b-2)=0$

$\Leftrightarrow a-b-2=0 \ (\text{do } a+b>0)$

$\Leftrightarrow a=b+2$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2-x+1}+2$

$\Rightarrow 2x^2+x+9=(2x^2-x+1)+4\sqrt{2x^2-x+1}+4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-x+1}=x+2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4(2x^2-x+1)=x^2+4x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{0;\frac{8}{7}\right\}$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $a(1+b)+b(1+4c)+c(1+9a)\ge 12\sqrt{abc}$.

Ta có: $a(1+b)+b(1+4c)+c(1+9a)\ge 12\sqrt{abc}$

$\Leftrightarrow a+ab+b+4bc+c+9ca\ge 12\sqrt{abc}$

$\Leftrightarrow (a+4bc)+(b+9ca)+(c+ab)\ge 12\sqrt{abc}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\begin{cases} a+4bc\ge 2\sqrt{a.4bc}=4\sqrt{abc} \\ b+9ac\ge 2\sqrt{b.9ac}=6\sqrt{abc} \\ c+ab\ge 2\sqrt{c.ab}=2\sqrt{abc} \end{cases} \Rightarrow (a+4bc)+(b+9ca)+(c+ab)\ge 12\sqrt{abc}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

THĂNG LONG

b) i) Cho a, b, x, y là các số thực và x, y > 0. Chứng minh: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Ta có : $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)}{xy(x+y)}\ge\frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)}$

$\Leftrightarrow a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy\ge a^2xy+2abxy+b^2xy$

$\Leftrightarrow a^2y^2-2abxy+b^2x^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

ii) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\ge 3$. Chứng minh rằng:

$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\ge\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$, ta có:

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{xz}}\ge\frac{(x+y)^2}{x+\sqrt{yz}+y+\sqrt{xz}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\ge\frac{(x+y)^2}{x+\sqrt{yz}+y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$, ta có:

$$\frac{(x+y)^2}{x+\sqrt{yz}+y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}} \quad (3)$$

Ta dễ chứng minh: $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}\le x+y+z$

$\Leftrightarrow x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}\le 2(x+y+z)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\ge\frac{1}{2(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\ge\frac{x+y+z}{2}$

Mà $x+y+z\ge 3$

THĂNG LONG

Nên $\dfrac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}} \ge \dfrac{3}{2}$ (4)

Từ (3) và (4), ta có: $\dfrac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\dfrac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\dfrac{z^2}{z+\sqrt{xy}} \ge \dfrac{3}{2}$

Bài 4: (1 điểm) Giá bán của một hộp bút là 21250 đồng. Mừng ngày 30/4 người bán giảm giá lần thứ nhất. Đến ngày Quốc tế thiếu nhi người bán lại giảm giá một lần nữa, nên giá bán chỉ còn lại là 19176 đồng. Hỏi mỗi lần người bán giảm giá bao nhiêu phần trăm, biết rằng số phần trăm mỗi lần giảm giá là số chỉ có một chữ số.

Gọi x% là số phần trăm giảm giá lần I $\left(1 \le x, y \le 9,\ x,y \in N^*\right)$

Gọi y% là số phần trăm giảm giá lần II

Số tiền giảm giá lần I : $\dfrac{21250x}{100}$ (đồng)

Số tiền giảm giá lần II : $\left(21250-\dfrac{21250x}{100}\right)\dfrac{y}{100}$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình : $21250-\left[\dfrac{21250x}{100}+\left(21250-\dfrac{21250x}{100}\right)\dfrac{y}{100}\right]=19176$

$\Leftrightarrow xy-100x-100y=-976$

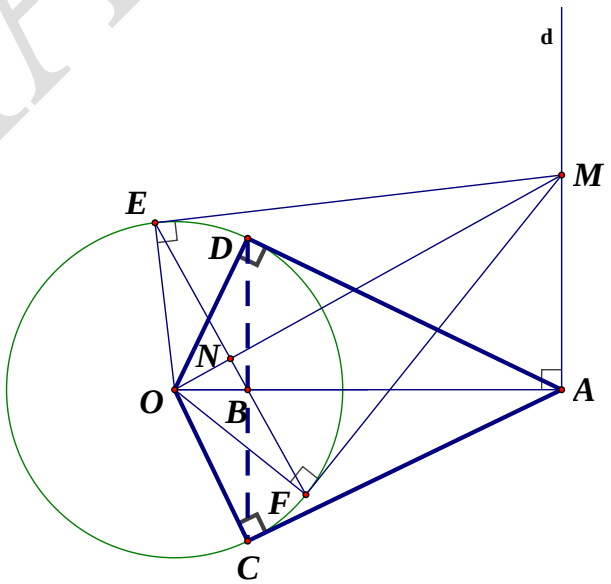
$\Leftrightarrow (x-100)(y-100)=9024$ (1)

Vì $\begin{cases}1 \le x, y \le 9\\ x,y \in N^*\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-99 \le x-100 \le -91\\ -99 \le y-100 \le -91\end{cases}\left(x, y \in N^*\right)$

Nên từ (1) $\Rightarrow \begin{cases}x-100=-94\\ y-100=-96\end{cases}$ hay $\begin{cases}x-100=-96\\ y-100=-94\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=4\\ y=6\end{cases}$

Vậy người bán giảm giá 2 lần, 1 lần 4%, 1 lần 6%.

Bài 5: (4 điểm) Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O,R). Qua A vẽ đường thẳng (d) $\perp$ OA. Gọi M là điểm bất kỳ trên (d). Từ M vẽ 2 tiếp tuyến ME và MF với đường tròn (O) (E, F là 2 tiếp điểm). Gọi N và B là giao điểm của EF với OM và OA.



a) Chứng minh: ON.OM = OA.OB

$\Delta ONB \backsim OAM(g-g) \Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{OB}{OM} \Rightarrow ON.OM = OA.OB$.

b) Vẽ tiếp tuyến AD, AC đến (O) (C, D là 2 tiếp điểm). Chứng minh: C, D, B thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} OE^2 = ON.OM \\ ON.OM = OA.OB \Rightarrow OD^2 = OA.OB \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA} \\ OE = OD \end{cases}$

Xét ΔOBD và ΔODA, ta có: $\begin{cases} BOD = ODA \\ \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA} \end{cases} \Rightarrow \Delta OBD \backsim \Delta ODA(c-g-c)$

$OBD = ODA = 90^0 \Rightarrow DB \perp OA$ tại B mà $DC \perp OA$ tại A nên $DB \equiv DC$ (Tiên đề Ơ-clit)
$\Rightarrow$ C, D, B thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của M để $S_{\Delta MEF}$ nhỏ nhất.

Xét (O), ta có:

$\begin{cases} \textbf{ON là khoảng cách từ O đến dây EF} \\ \textbf{OB là khoảng cách từ O đến dây CD} \\ \textbf{ON} \le \textbf{OB}(\textbf{quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên}) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{EF \ge CD \Rightarrow \frac{1}{2}EF \ge \frac{1}{2}CD} \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} \mathbf{OM \ge OA}(\textbf{quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc}) \\ \mathbf{OB \ge ON}(\textbf{quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc}) \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{OM + OB \ge OA + ON}$

$\Rightarrow \mathbf{OM - ON \ge OA - OB}$

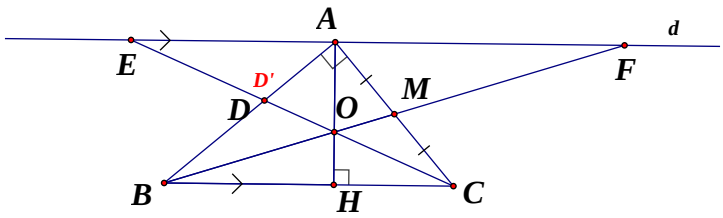
$\Rightarrow \mathbf{MN \ge AB} \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta suy ra $\mathbf{\frac{1}{2}EF.MN \ge \frac{1}{2}CD.AB \Rightarrow S_{MEF} \ge \frac{1}{2}CD.AB}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{ON = OB} \\ \mathbf{OM = OA} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{M \equiv A}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\mathbf{S_{MEF}}$ là $\mathbf{\frac{1}{2}CD.AB}$ khi $\mathbf{M \equiv A}$.

Bài 6: (2 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH và trung tuyến BM cắt nhau tại O, CO cắt AB tại D. Qua A vẽ đường thẳng (d) song song với BC. (d) cắt CD, BM tại E và F.



a) Chứng minh: $\frac{HB}{HC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{DA}{DB}=1$.

$$\begin{cases}\frac{HB}{AF}=\frac{OH}{OA}\\ \frac{AE}{HC}=\frac{OA}{OH}\end{cases}\Rightarrow\frac{HB}{AF}\cdot\frac{AE}{HC}=1\Rightarrow\frac{HB}{HC}=\frac{AF}{AE}$$

Mà $\begin{cases}\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AF}\\ \frac{DA}{DC}=\frac{AE}{BC}\end{cases}$ nên $\frac{HB}{HC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{DA}{DB}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BC}{AF}\cdot\frac{AE}{BC}=1$

b) Giả sử AC = BH, chứng minh CD là phân giác ACB.

Ta dễ chứng minh được: $\Delta CHA\backsim\Delta CAB(g-g)\Rightarrow\frac{CA}{CB}=\frac{HC}{AC}$ mà AC = BH (gt) nên $\frac{CA}{CB}=\frac{HC}{BH}$ (1)

T a có: $\begin{cases}\frac{HB}{HC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{DA}{DB}=1\\ MC=MA\end{cases}\Rightarrow\frac{HB}{HC}\cdot\frac{DA}{DB}=1\Rightarrow\frac{DA}{DB}=\frac{HC}{HB}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}$

Vẽ CD' là đường phân giác của $\Delta ABC.\Rightarrow\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$

Mà $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}$ (cmt) nên $\frac{D'A}{D'B}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow\frac{D'A}{DA}=\frac{D'B}{DB}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{D'A}{DA}=\frac{D'B}{DB}=\frac{D'A+D'B}{DA+DB}=\frac{AB}{AB}=1\Rightarrow D'A=DB\Rightarrow D'\equiv D$

Mà CD' là đường phân giác của ΔABC (cách gọi)

Nên CD là đường phân giác của $\Delta ABC\Rightarrow$ CD là phân giác ACB.

HẾT

THĂNG LONG